UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
- ANCONA -

Esercizi Svolti di

CALCOLO NUMERICO

prof. **Anna Maria Perdon**

a cura del tutor ***Marco Orlandi***

FACOLTÀ DI
INGEGNERIA

DIPARTIMENTO DI
MATEMATICA

Determinare X in modo che siano verificate le identità :

$123.456_7 = X_{10}$

Si ha $X = 1 \ast 7^2 + 2 \ast 7^1 + 3 \ast 7^0 + 4 \ast 7^{-1} + 5 \ast 7^{-2} + 6 \ast 7^{-3} \cong \mathbf{66.691_{10}}$

$42.24_{10} = X_6$

Consideriamo separatamente la parte intera da quella frazionaria;

Dividiamo la <u>parte intera</u> per la base nella quale convertire il numero (6 in questo caso); il resto **0** costituisce l'ultima cifra del numero cercato, mentre dividiamo nuovamente il quoziente per sei. Ad ogni passo conserviamo il resto e dividiamo il quoziente, finché esso non è nullo. <u>Rovesciamo</u> quindi l'ordine dei resti ottenuti.

$42 = 7 * 6 + \underline{0}$
$7 = 1 * 6 + \underline{1}$
$1 = 0 * 6 + \underline{1}$

Moltiplichiamo la <u>parte frazionaria</u> per la base; la parte intera così ottenuta costituisce il numero cercato, mentre moltiplichiamo nuovamente la parte frazionaria. Il ciclo termina quando la parte frazionaria è nulla o ho raggiunto un valore ottenuto precedentemente, e quindi il numero è periodico (come in questo caso).

0.24 *	6	$\underline{1}$.44
0.44 *	6	$\underline{2}$.64
0.64 *	6	$\underline{3}$.84
0.84 *	6	$\underline{5}$.04
0.04 *	6	$\underline{0}$.24

Quindi $\mathbf{X=110,\overline{12350}_6}$

$13.0241_6 = X_5$

Per risolvere questo problema convertiamo 13.0241_6 in base_{10}, poi il numero così ottenuto in base_5.

$13.0241_6 = 1*6^1 + 3*6^0 + 0*6^{-1} + 2*6^{-2} + 4*6^{-3} + 1*6^{-4} = 9.075_{10}$

Dividiamo la <u>parte intera</u> per la base nella quale convertire il numero (6 in questo caso); il resto **0** costituisce l'ultima cifra del numero cercato, mentre dividiamo nuovamente il quoziente per sei. Ad ogni passo conserviamo il resto e dividiamo il quoziente, finché esso non è nullo. <u>Rovesciamo</u> quindi l'ordine dei resti ottenuti.

$9 = 1 * 5 + \underline{4}$
$4 = 0 * 5 + \underline{4}$

Moltiplichiamo la <u>parte frazionaria</u> per la base; la parte intera così ottenuta costituisce il numero cercato, mentre moltiplichiamo nuovamente la parte frazionaria. Il ciclo termina quando la parte frazionaria è nulla o ho raggiunto un valore ottenuto precedentemente, e quindi il numero è periodico (come in questo caso).

0.075 * 5 0.375
0.375 * 5 1.875
0.875 * 5 4.375
0.375 * 5 1.875

In questo caso $\mathbf{X = 14.0\overline{14}_5}$

Scrivere in base 10 il seguente numero espresso in virgola mobile su 32 bit, con mantissa normalizzata ed esponente ad eccesso 64: BC10DE7A

Un numero viene espresso nella forma $\pm 0.p\ N^{\pm q}$; in questo caso N=16 e :

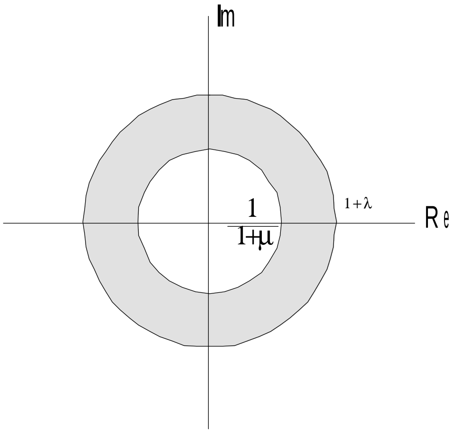
<table>
<tr><td>b_0</td><td>b_1</td><td>b_2</td><td>b_3</td><td>b_4</td><td>b_1</td><td>b_5</td><td>b_6</td><td>b_7</td><td>b_8</td><td>b_9</td><td>b_{10}</td><td>b_{11}</td><td>b_{12}</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>b_{30}</td><td>b_{31}</td></tr>
<tr><td>segno</td><td colspan="8">esponente q</td><td colspan="12">mantissa normalizzata p</td></tr>
<tr><td colspan="9">B C</td><td colspan="12">10DE7A</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">0</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="4">C</td><td colspan="12"></td></tr>
</table>

Il segno 1 indica che il numero è negativo;
il valore dell'esponente $q_{10} = q^*_{10} - 64_{10}$; si ha $q^*_{10} = 3C_{16} = 60_{10} \Rightarrow q_{10} = -4$
la mantissa ha valore
$0.10DE7A_{16} = 1*16^{-1} + 13*16^{-3} + 14*16^{-4} + 7*16^{-5} + 10*16^{-6} \cong 0.06589472293854_{10}$.

X = $-0.06589472293854 * 16^{-4} =$ $\mathbf{-1.005473677651062*10^{-6}}$.

Dato il polinomio $P(x) = 2x^3 - 3.46x^2 + 0.8x - 1.39$

i) determinare la regione che contiene tutte le radici di P(x);



Ogni radice α del polinomio soddisfa la diseguaglianza $\frac{1}{1+m} < |a| < 1+l$, quindi si trova nella corona circolare nel piano complesso raffigurata a lato.
($l = \max\limits_{i=1..n}\left|\frac{a_i}{a_0}\right| = 1.73$ ⇒ 1+λ = 2.73 e $m = \max\limits_{i=1..n}\left|\frac{a_i}{a_n}\right| \cong 2.49$

⇒ $1/_{\mu+1} \cong 0.287$).

ii) costruire una successione di Sturm per P(x);

Seguendo le regole descritte nel libro la successione di Sturm è la seguente

$p_0 = +2x^3 - 3.46x^2 + 0.8x - 1.39$
$p_1 = -6x^2 + 6.92x - 0.8$
$p_2 = +x + 1.551$
$p_3 = 1$

Rappresento le variazioni dei segni

p_0=	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
p_1=	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
p_2=	-1	-1	1	1	1	1	1
p_3=	1	1	1	1	1	1	1
	-∞	-2.73	-0.287	0	0.287	2.73	∞
w(x)=	1	1	1	1	1	2	2

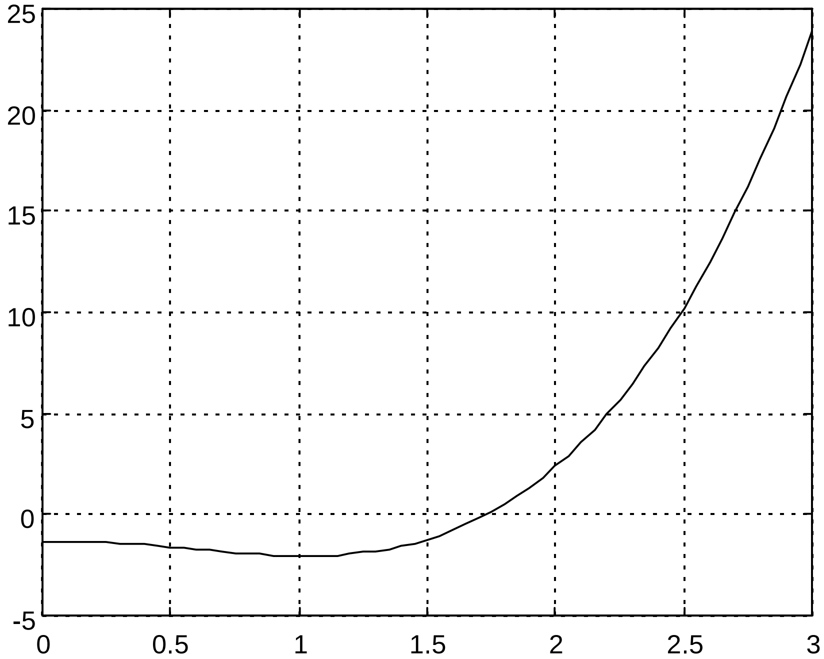
1 radice reale nell'intervallo [0.287 , 2.73]

il polinomio ha 2 radici complesse, due a due coniugate

iii) determinare tutte le radici di P(x) con 5 decimali esatti.

Traccio un grafico approssimato della funzione P(x), poi applico vari metodi di ricerca degli zeri.

$y = 2x^3 - 3.46\,x^2 + 0.8x - 1.39$



- Metodo di **Newton-Raphson**:

$f(x) = 2*x^3 - 3.46*x^2 + 0.8*x - 1.39$

$f'(x) = 6*x^2 - 6.92*x + 0.8$

$f''(x) = 12*x - 6.92$

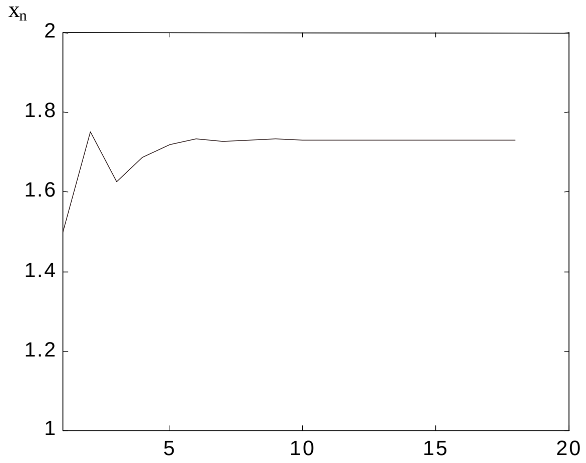
$$m \approx \left| \frac{f(x) \bullet f''(x)}{[f'(x)]^2} \right|_{x_0} \approx 0.337$$

$x_0 = 2$

$x_1=$	1.78375912408759	$\Delta x=$	0.2162	$\varepsilon_1=$	0.1099
$x_2=$	1.73352722643167	$\Delta x=$	0.5023e-1	$\varepsilon_2=$	0.2553e-1
$x_3=$	1.73089049660040	$\Delta x=$	0.2636e-2	$\varepsilon_3=$	0.1340e-2
$x_4=$	1.73088340337044	$\Delta x=$	0.7093e-5	$\varepsilon_4=$	0.3605e-5

- **Metodo dicotomico** ottengo la successione dei valori intermedi:

Gli estremi iniziali che considero sono a = 1 e   b = 2;



1	1.50000000000000
2	1.75000000000000
3	1.62500000000000
4	1.68750000000000
5	1.71875000000000
6	1.73437500000000
7	1.72656250000000
8	1.73046875000000
9	1.73242187500000
10	1.73144531250000
11	1.73095703125000
12	1.73071289062500
13	1.73083496093750
14	1.73089599609375
15	1.73086547851562
16	1.73088073730469
17	1.73088836669922
18	1.73088455200195

- m. **della secante variabile**

Gli estremi iniziali che considero sono a = 1 e   b = 2;

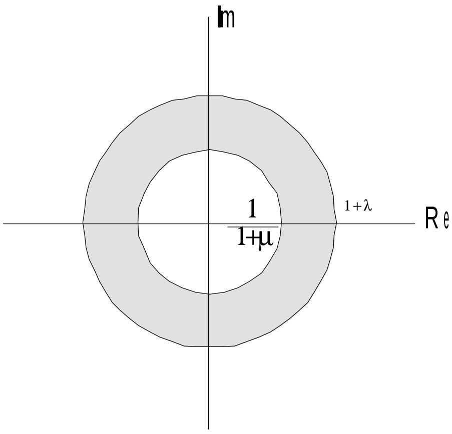
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

x_0 =	1		
x_1 =	2		
x_2 =	1.46380090497738	Δx_2=	-0.53619
x_3 =	1.65928100340954	Δx_3=	0.195480
x_4 =	1.75661369459496	Δx_4=	0.973326e-1
x_5 =	1.72894300119723	Δx_5=	-0.27670e-1
x_6 =	1.73083341264931	Δx_6=	0.189041e-2
x_7 =	1.73088350228096	Δx_7=	0.500896e-4
x_8 =	1.73088340331414	Δx_8=	-0.98966e-7

$$\Rightarrow \mathbf{x = 1.73088}$$

Dato il polinomio $\quad$ **$P(x) = x^3 - 1.9\, x^2 - 1.2\, x + 2.5$**

i) determinare la regione che contiene tutte le radici di P(x);



Ogni radice α del polinomio soddisfa la diseguaglianza $\frac{1}{1+m} < |a| < 1 + l$, quindi si trova nella corona circolare nel piano complesso raffigurata a lato.
($l = \max\limits_{i=1..n} \left| \frac{a_i}{a_0} \right| = 2.5 \quad \Rightarrow$ 1+λ = 3.5 e $\quad m = \max\limits_{i=1..n} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| = 1 \quad \Rightarrow$ $1/_{\mu+1}$ = 0.5).

ii) costruire una successione di Sturm per P(x);

Seguendo le regole descritte nel libro la successione di Sturm è la seguente

p_0 = + x^3 -1.9 x^2 -1.2 x +2.5
p_1 = -3 x^2 +3.8 x +1.2
p_2 = + x -1.402
p_3 = -1

Rappresento le variazioni dei segni

	-∞	-3.5	-0.568	0	0.568	3.5	∞
p_0=	-1	-1	1	1	1	1	1
p_1=	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
p_2=	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
p_3=	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
w(x)=	0	0	1	1	1	3	3

1 radice reale nell'intervallo [-3.5 , -0.568]
2 radici reali nell'intervallo [0.568 , 3.5]

Cerco di dividere il secondo dei due intervalli in maniera tale da avere intervalli che contengono un’unica radice ciascuno (la successione di Sturm ci garantisce che non esistono radici multiple).

w(1.5) = 2

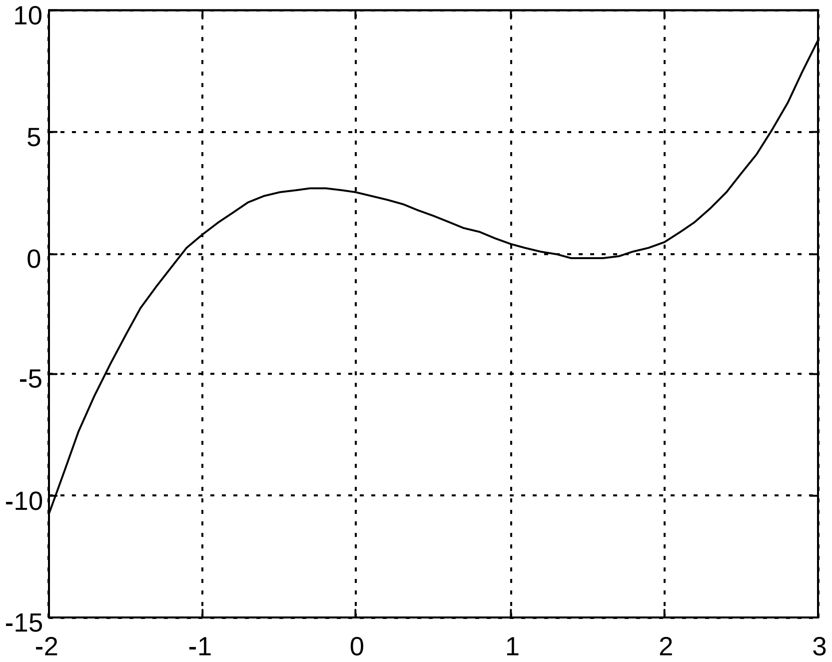
$\Downarrow$

1 radice reale nell'intervallo [-3.5 , -0.568]
1 radice reale nell'intervallo [0.568 , 1.5]
1 radice reale nell'intervallo [1.5, 3.5]

iii) determinare tutte le radici di P(x) con 5 decimali esatti.

Traccio un grafico approssimato della funzione P(x), poi applico vari metodi di ricerca degli zeri.

$y = x^3 - 1.9\,x^2 - 1.2\,x + 2.5$



- Metodo di **Newton-Raphson**:

$f(x) = + x^3 -1.9\, x^2 -1.2\, x +2.5$

$f'(x) = 3\, x^2 -3.8\, x -1.2$

$f''(x) = 6\, x -3.8$

$x_{01}= -1 \quad m \approx \left| \frac{f(x) \bullet f''(x)}{[f'(x)]^2} \right|_{x_0} \approx 0.25$

$x_{11}=$	-1.14285714285714	$\Delta x=$	0.142857	$\varepsilon_1=$	0.47619
$x_{21}=$	-1.12828241123039	$\Delta x=$	0.145747e-1	$\varepsilon_2=$	0.48582e-2
$x_{31}=$	-1.12811896982594	$\Delta x=$	0.163441e-3	$\varepsilon_3=$	0.54480e-4
$x_{41}=$	-1.12811894938073	$\Delta x=$	0.204452e-7	$\varepsilon_4=$	0.68151e-8

$\Rightarrow$ **x_1 = -1.12811**

$x_{02}= 1 \quad m \approx \left| \frac{f(x) \bullet f''(x)}{[f'(x)]^2} \right|_{x_0} \approx 0.22$

$x_{12}=$	1.20000000000000	$\Delta x=$	0.20000	$\varepsilon_1=$	0.5641e-1
$x_{22}=$	1.23611111111111	$\Delta x=$	0.3611e-1	$\varepsilon_2=$	0.1018e-1
$x_{32}=$	1.23783493107984	$\Delta x=$	0.1723e-2	$\varepsilon_3=$	0.4862e-3
$x_{42}=$	1.23783904616022	$\Delta x=$	0.4115e-5	$\varepsilon_4=$	0.1160e-5

$\Rightarrow$ **x_2 = 1.23783**

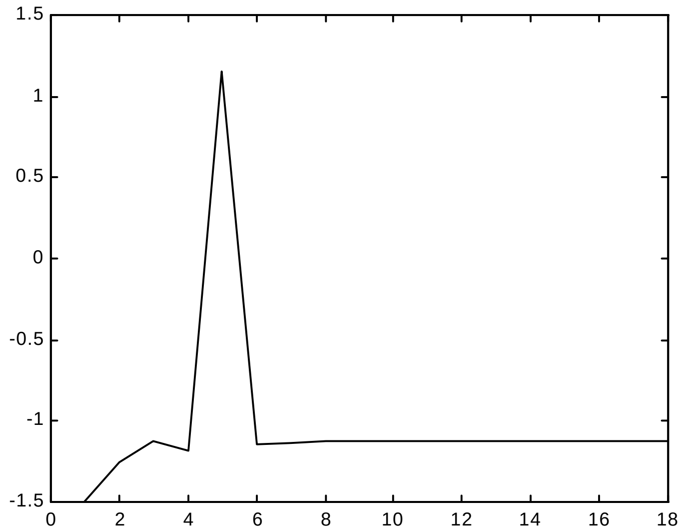
$x_{03}= 2 \quad m \approx \left| \frac{f(x) \bullet f''(x)}{[f'(x)]^2} \right|_{x_0} \approx 0.4004$

$x_{13}=$	1.84375000000000	$\Delta x=$	0.15625	$\varepsilon_1=$	0.10433
$x_{23}=$	1.79541499166585	$\Delta x=$	0.48335e-1	$\varepsilon_2=$	0.32275e-1
$x_{33}=$	1.79033560443098	$\Delta x=$	0.50793e-2	$\varepsilon_3=$	0.33917e-2
$x_{43}=$	1.79027990987497	$\Delta x=$	0.55694e-4	$\varepsilon_4=$	0.37190e-4
$x_{53}=$	1.79027990319701	$\Delta x=$	0.66779e-8	$\varepsilon_5=$	0.44592e-8

$\Rightarrow$ **x_3 = 1.79027**

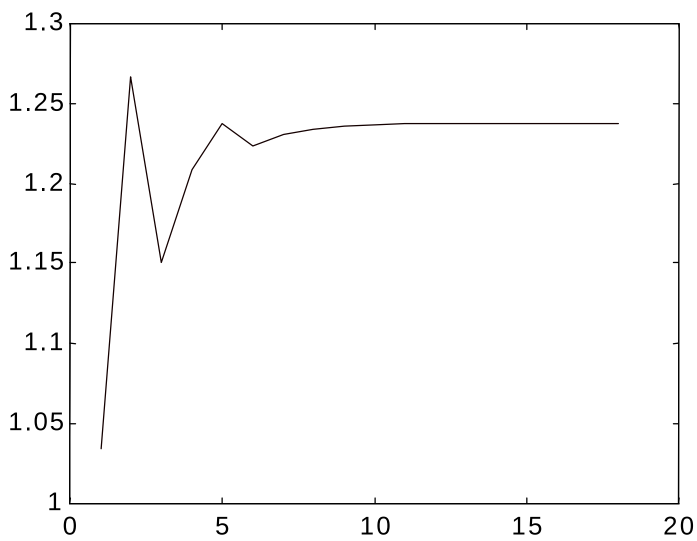
- **Metodo dicotomico** ottengo la successione dei valori intermedi:

Gli estremi iniziali che considero inizialmente sono a = -2 e   b = -1;



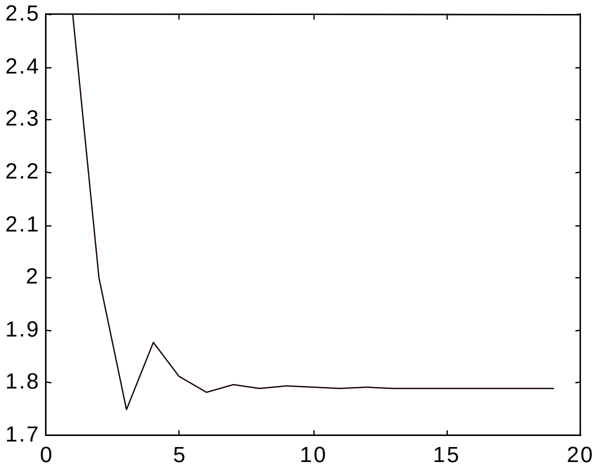
1	-1.50000000000000
2	-1.25000000000000
3	-1.12500000000000
4	-1.18750000000000
5	1.15625000000000
6	-1.14062500000000
7	-1.13281250000000
8	-1.12890625000000
9	-1.12695312500000
10	-1.12792968750000
11	-1.12841796875000
12	-1.12817382812500
13	-1.12805175781250
14	-1.12811279296875
15	-1.12814331054688
16	-1.12812805175781
17	-1.12812042236328
18	-1.12811660766602

gli estremi iniziali che considero ora sono a = 0.568 e   b = 1.5;



1	1.03400000000000
2	1.26700000000000
3	1.15050000000000
4	1.20875000000000
5	1.23787500000000
6	1.22331250000000
7	1.23059375000000
8	1.23423437500000
9	1.23605468750000
10	1.23696484375000
11	1.23741992187500
12	1.23764746093750
13	1.23776123046875
14	1.23781811523437
15	1.23784655761719
16	1.23783233642578
17	1.23783944702148
18	1.23783589172363

gli estremi iniziali che considero ora sono a = 1.5 e   b = 3.5;



1	2.50000000000000
2	2.00000000000000
3	1.75000000000000
4	1.87500000000000
5	1.81250000000000
6	1.78125000000000
7	1.79687500000000
8	1.78906250000000
9	1.79296875000000
10	1.79101562500000
11	1.79003906250000
12	1.79052734375000
13	1.79028320312500
14	1.79016113281250
15	1.79022216796875
16	1.79025268554688
17	1.79026794433594
18	1.79027557373047
19	1.79027938842773

- m. **della secante variabile**

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$\mathbf{x_{01}}$ **=**	**-2**		
x_{11} =	-1		
x_{21} =	-1.06956521739130	Δx_{21}=	-0.69565e-1
x_{31} =	-1.13455081900499	Δx_{31}=	-0.649856e-1
x_{41} =	-1.12782184870722	Δx_{41}=	0.672897e-2
x_{51} =	-1.12811749208232	Δx_{51}=	-0.295643e-3
x_{61} =	-1.12811894971214	Δx_{61}=	-0.145762e-5

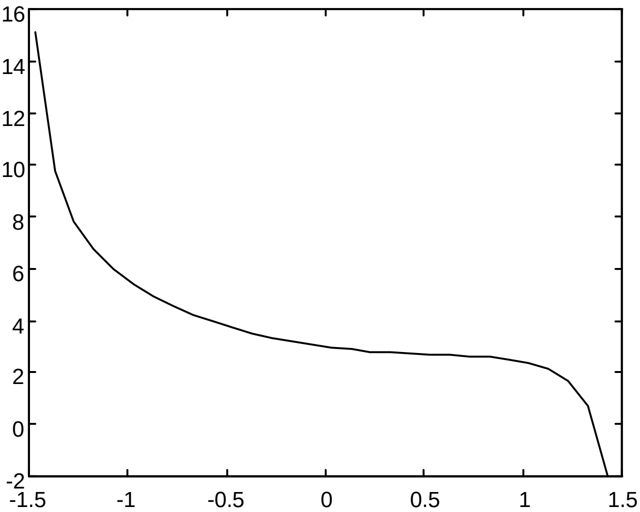
$\mathbf{x_{02}}$ **=**	**0.568**		
x_{12} =	1.5		
x_{22} =	1.38266876924232	Δx_{22}=	-0.11733123075768
x_{32} =	1.04678800048652	Δx_{32}=	-0.33588076875581
x_{42} =	1.27376731637917	Δx_{42}=	0.22697931589265
x_{52} =	1.24514810620089	Δx_{52}=	-0.02861921017828
x_{62} =	1.23744167538960	Δx_{62}=	-0.00770643081129
x_{72} =	1.23784313069676	Δx_{72}=	0.00040145530716
x_{82} =	1.23783904843399	Δx_{82}=	-0.00000408226277

$\mathbf{x_{03}}$ **=** **1.5**

x_{13} =	3.5		
x_{23} =	1.52209944751381	Δx_{23}=	-1.97790055248619
x_{33} =	1.54417452422336	Δx_{33}=	0.02207507670955
x_{43} =	9.37469990436531	Δx_{43}=	7.83052538014194
x_{53} =	1.54660769923208	Δx_{53}=	-7.82809220513323
x_{63} =	1.54903740997284	Δx_{63}=	0.00242971074076
x_{73} =	3.45339626188619	Δx_{73}=	1.90435885191335
x_{83} =	1.57144313053755	Δx_{83}=	-1.88195313134864
x_{93} =	1.59316005567499	Δx_{93}=	0.02171692513744
x_{103} =	2.23188742936482	Δx_{103}=	0.63872737368983
x_{113} =	1.66625308964394	Δx_{113}=	-0.56563433972089
x_{123} =	1.71798517041893	Δx_{123}=	0.05173208077500
x_{133} =	1.82085088892257	Δx_{133}=	0.10286571850364
x_{143} =	1.78512910880428	Δx_{143}=	-0.03572178011829
x_{153} =	1.78995630012534	Δx_{153}=	0.00482719132106
x_{163} =	1.79028352851754	Δx_{163}=	0.00032722839220
x_{173} =	1.79027990066991	Δx_{173}=	-0.00000362784763

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &\mathbf{x_1=-1.12811} \\ &\mathbf{x_2 = 1.23783} \\ &\mathbf{x_3 = 1.79027} \end{aligned}$$

Determinare gli eventuali zeri della funzione
$f(x) = x^2 + 3 - tg(x)$
nell'intervallo [$-\pi/_2$, $\pi/_2$] con 5 decimali esatti.



Da una prima analisi del grafico la soluzione x* è compresa tra 1 e $\pi/2$, e dato che la funzione è monotona la radice da cercare è unica.

- **m. di Newton-Raphson**

Questo metodo è un caso particolare del metodo di punto fisso, quindi l'errore al passo n-esimo (una volte soddisfatte le ipotesi) può essere maggiorato come segue : $\left| x^* - x_n \right| \langle \frac{m}{m-1} \left| x_n - x_{n-1} \right|$.

Senza studiare approfonditamente $\Phi'(x)$ in tutto l'intervallo di studio,possiamo approssimare la costante m con $\Phi'(x_0)$, quindi $m \cong \left| \frac{f(x) \bullet f''(x)}{\left[f'(x) \right]^2} \right|_{x_0}$

$f'(x) = 2 * x - 1 - tg^2 x$
$f''(x) = 2 - 2 * tg(x) * (1 + tg^2(x))$

Considero come punti iniziali i valori x_0 = 1.3, 1.35, 1.5 ; notare come cambiando la costante m risultano influenzate la velocità di convergenza e la relazione tra Δx e ε_n .

x_0 =	**1.3**	$m \approx 0.8297$			
x_1 =	1.39563815094928	Δx =	0.09563	ε_1 =	0.46583
x_2 =	1.372318847117279	Δx =	0.02332	ε_2 =	0.11358
x_3 =	1.36845562512501	Δx =	0.386778e-2	ε_3 =	0.18815e-1
x_4 =	1.36837131370043	Δx =	0.843114e-4	ε_4 =	0.41066e-3
x_5 =	1.36837127504791	Δx =	0.386525e-7	ε_5 =	0.18826e-6

x_0 =	**1.35**	m ≈ 0.2049			
x_1 =	1.37023682966996	Δx =	0.2023e-1	ε_1 =	0..5215e-2
x_2 =	1.368390015185397	Δx =	0.1846e-2	ε_2 =	0.4759e-3
x_3 =	1.36837127698383	Δx =	0.18874e-4	ε_3 =	0.4864e-5

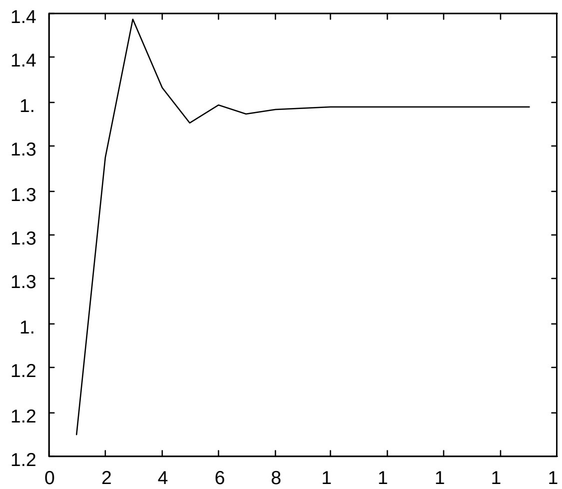
x_0 =	**1.5**	m ≈ 1.287			
x_1 =	1.45503470690869	Δx =	0.4496e-1	ε_1 =	0.2016
x_2 =	1.40669540082292	Δx =	0.4833e-1	ε_2 =	0.2167
x_3 =	1.37610295868495	Δx =	0.3059e-1	ε_3 =	0.1371
x_4 =	1.36869283699372	Δx =	0.7409e-2	ε_4 =	0.3322e-1
x_5 =	1.36837184016712	Δx =	0.3219e-3	ε_5 =	0.1443e-2
x_6 =	1.36687128504963	Δx =	0.5651e-6	ε_6 =	0.2534e-5

Provare x_0 = 1 come punto iniziale: ottengo x_{32} = 4.67213500179978 (Δx = 0.9584e-7 ε_{32} = 0.1060e-6) perchè ad una iterazione il punto non si mantiene nell'intervallo (non sono infatti soddisfatte le ipotesi del teor.di punto fisso (m ≈ 10.52).

$$\Rightarrow \mathbf{x = 1.36837}$$

- **m. dicotomico o di bisezione**

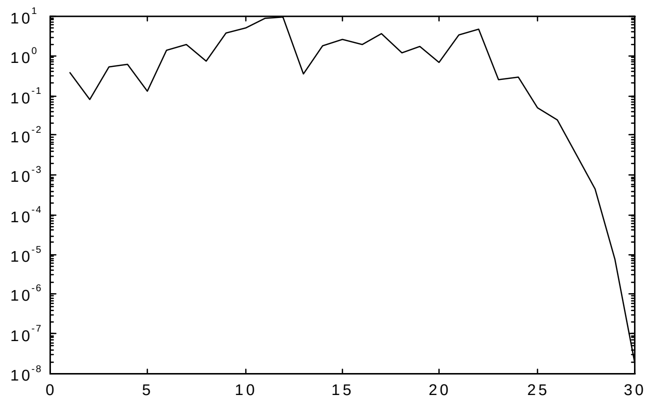
consideriamo come intervallo iniziale il seguente [1 , 1.5]



1	1.25000000000000
2	1.37500000000000
3	1.31250000000000
4	1.34375000000000
5	1.35937500000000
6	1.36718750000000
7	1.37109375000000
8	1.36914062500000
9	1.36816406250000
10	1.36865234375000
11	1.36840820312500
12	1.36828613281250
13	1.36834716796875
14	1.36837768554688
15	1.36836242675781
16	1.36837005615234
17	1.36837387084961

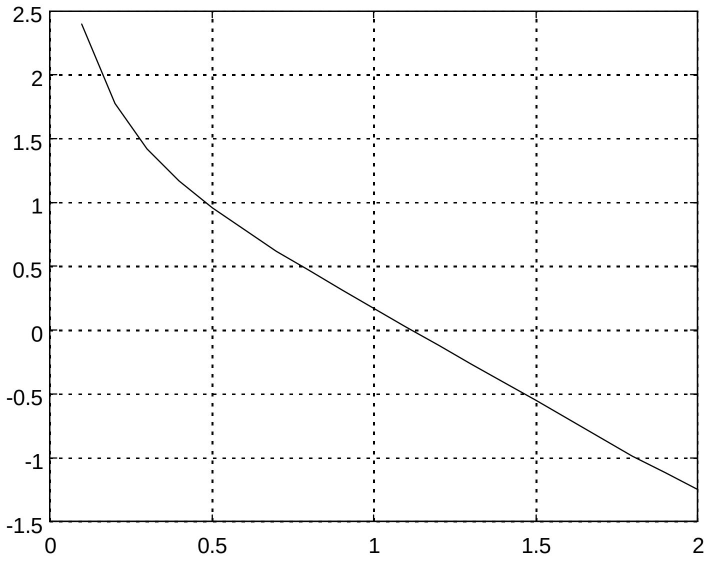
- **m. della secante variabile**

x_0 =	1		
x_1 =	1.5		
x_2 =	1.10813660492041	Δx_2 =	-0.39186339507959
x_3 =	1.18679696081657	Δx_3 =	0.07866035589616
x_4 =	1.71231066321900	Δx_4 =	0.52551370240243
x_5 =	1.09456917569450	Δx_5 =	-0.61774148752450
x_6 =	0.96402475020519	Δx_6 =	-0.13054442548930
x_7 =	2.38124091338795	Δx_7 =	1.41721616318275
x_8=	0.46954554685858	Δx_8=	-1.91169536652936
x_9 =	-0.28122409103002	Δx_9 =	-0.75076963788860
x_{10} =	3.57984215531268	Δx_{10} =	3.86106624634270
x_{11} =	-1.36681673599704	Δx_{11} =	-4.94665889130972
x_{12} =	-9.87023693554782	Δx_{12} =	-8.50342019955078
x_{13} =	-0.46213303224616	Δx_{13} =	9.40810390330166
x_{14} =	-0.10282887631731	Δx_{14} =	0.35930415592885
x_{15} =	1.76834244730200	Δx_{15} =	1.87117132361930
x_{16} =	-0.83027690898484	Δx_{16} =	-2.59861935628684
x_{17} =	-2.79096807133559	Δx_{17} =	-1.96069116235075
x_{18} =	0.83251812621337	Δx_{18} =	3.62348619754896
x_{19} =	2.03304580573225	Δx_{19} =	1.20052767951888
x_{20} =	0.35677470415808	Δx_{20} =	-1.67627110157417
x_{21} =	-0.36630630710262	Δx_{21} =	-0.72308101126069
x_{22} =	2.96641263177833	Δx_{22} =	3.33271893888094
x_{23} =	-1.75229982940406	Δx_{23} =	-4.71871246118238
x_{24} =	-2.01063703088518	Δx_{24} =	-0.25833720148112
x_{25} =	-1.71491706569694	Δx_{25} =	0.29571996518823
x_{26} =	-1.76277772993730	Δx_{26} =	-0.04786066424035
x_{27} =	-1.73868321535754	Δx_{27} =	0.02409451457976
x_{28} =	-1.73516383020743	Δx_{28} =	0.00351938515011
x_{29} =	-1.73561944254943	Δx_{29} =	-0.00045561234200
x_{30} =	-1.73561193989307	Δx_{30} =	0.00000750265636
x_{31} =	-1.73561192143932	Δx_{31} =	0.00000001845375



Questo grafico in scala semilogaritmica visualizza l’andamento di $|\Delta x|$ all’aumentare del numero di iterazioni

Determinare con 5 decimali esatti l'intersezione delle curve
y=cos(x) y=log x +e^{-x}



Poniamo f(x) = cos(x) - log(x) - e^{-x} ; nel dominio] 0 , + ∞ [la f(x) è continua e derivabile; da una prima analisi del grafico la soluzione x* è compresa tra 0.8 e 1.4, e dato che la funzione è monotona la radice da cercare è unica.

- **m. di Newton-Raphson**

Questo metodo è un caso particolare del metodo di punto fisso, quindi l'errore al passo n-esimo (una volte soddisfatte le ipotesi) può essere maggiorato come segue : $\left| x^* - x_n \right| \langle \frac{m}{m-1} \left| x_n - x_{n-1} \right|$.

Senza studiare approfonditamente Φ'(x) in tutto l'intervallo di studio, possiamo approssimare la costante m con Φ'(x_0), quindi $m \cong \left| \frac{f(x) \bullet f''(x)}{[f'(x)]^2} \right|_{x_0}$.

.f'(x) = - sin(x) - $^1/_x$ + e^{-x}
f''(x) = - cos(x) + $^1/_{x2 - e^{-x}}$

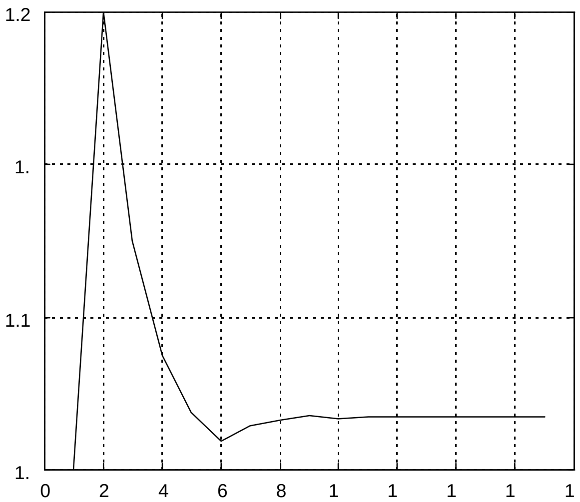
Considero come punti iniziali i valori x_0 = 0.8 1.4 ; notare come cambiando la costante m risultano influenzate la velocità di convergenza e la relazione tra Δx e ε_n .

x_0 =	**0.8**	m ≈ 0.085			
x_1 =	1.10995578948678	Δx =	0.3099	ε_1 =	0.2880e-1
x_2 =	1.11732258398910	Δx =	0.7366e-2	ε_2 =	0.6846e-3
x_3 =	1.11732326566569	Δx =	0.6816e-6	ε_3 =	0.6335e-7

x_0 =	**1.4**	m ≈ 0.018			
x_1 =	1.11571735023627	Δx =	0.28428	ε_1 =	0.5305e-2
x_2 =	1.11732323401966	Δx =	0.16058e-2	ε_2 =	0.2996e-4
x_3 =	1.11732326566569	Δx =	0.31646e-7	ε_3 =	0.5905e-9

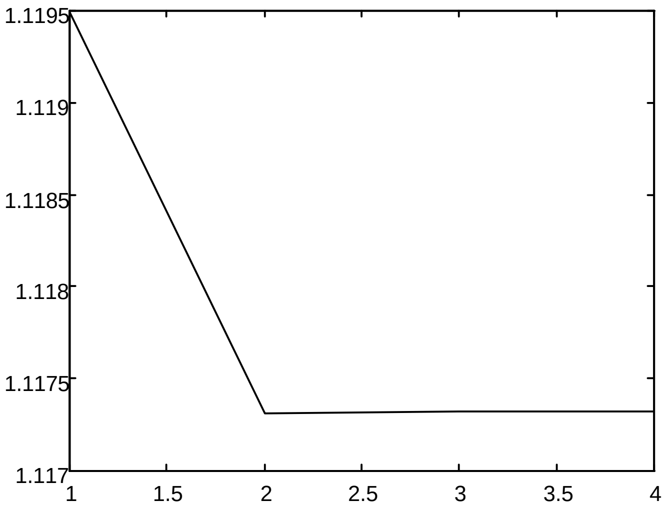
- **m. dicotomico o di bisezione**

consideriamo come intervallo iniziale il seguente [0.8 , 1.4]



1	1.10000000000000
2	1.25000000000000
3	1.17500000000000
4	1.13750000000000
5	1.11875000000000
6	1.10937500000000
7	1.11406250000000
8	1.11640625000000
9	1.11757812500000
10	1.11699218750000
11	1.11728515625000
12	1.11743164062500
13	1.11735839843750
14	1.11732177734375
15	1.11734008789063
16	1.11733093261719
17	1.11732635498047

- **m. della secante variabile**



$x_0 =$ 0.8
$x_1 =$ 1.4
$x_2 =$ 1.11949447304948 $\Delta x_2 =$ -0.28050552695052
$x_3 =$ 1.11731526999173 $\Delta x_3 =$ -0.00217920305775
$x_4 =$ 1.11732326587652 $\Delta x_4 =$ 0.00000799588480
$x_5 =$ 1.11732326566569 $\Delta x_5 =$ -0.00000000021083

Determinare la parabola $y = \alpha_0 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_2$ che meglio approssima, nel senso dei minimi quadrati, i seguenti dati.

x	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6
y	1.4408	2.2264	3.4000	3.5083	0.63461	-0.15566

Usando la stessa notazione del libro, possiamo scrivere

$$A = \begin{vmatrix} 1.0000 & 0.6000 & 0.3600 \\ 1.0000 & 0.8000 & 0.6400 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.2000 & 1.4400 \\ 1.0000 & 1.4000 & 1.9600 \\ 1.0000 & 1.6000 & 2.5600 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1.4408 \\ 2.2264 \\ 3.4000 \\ 3.5083 \\ 0.6346 \\ -0.1557 \end{vmatrix}$$

Resta ora da determinare il vettore x_0 dei coefficienti risolvendo il sistema $(A^t A)\, x_0 = A^t\, b$, in quanto le colonne di A sono linearmente indipendenti; tale soluzione può essere determinata con uno qualunque dei metodi visti per sistemi con matrice dei coefficienti simmetrica e definita positiva, ad esempio Cholesky.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 6.0000 & 6.6000 & 7.9600 \\ 6.6000 & 7.9600 & 10.2960 \\ 7.9600 & 10.2960 & 14.0080 \end{vmatrix}}_{A^t A} * \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{vmatrix}}_{x_0} = \underbrace{\begin{vmatrix} 11.0545 \\ 10.8950 \\ 11.2409 \end{vmatrix}}_{A^t b}$$

Risolvendo $x_0 = \begin{vmatrix} -7.9176 \\ 21.8317 \\ -10.7449 \end{vmatrix}$

La parabola cercata è quindi la seguente: $\mathbf{y = -10.7449\, x^2 + 21.8317\, x + -7.9176}$

Lo stesso risultato può essere ottenuto applicando la decomposizione QR alla matrice A, ed in questo caso dovrò minimizzare il vettore $\| R\, x - b_1 \|$, dove $A = Q \begin{vmatrix} R \\ 0 \end{vmatrix}$ e $Q^t\, b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$

Infatti $\| Ax - b \| = \| QR\, x - b \| = \| Q^T(QRx - b) \| = \| Rx - Q^T b \| = \left\| \begin{vmatrix} R\, x - b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} \right\|$

Dovendo minimizzare l'ultimo vettore potrò lavorare solo sulla sua parte superiore , non potendo modificare b_2 .

Effettuando la decomposizione ottengo:

$$Q = \begin{vmatrix} -0.4082 & -0.5976 & 0.5455 & 0.0272 & -0.0955 & -0.4107 \\ -0.4082 & -0.3586 & -0.1091 & 0.1687 & 0.4268 & 0.6945 \\ -0.4082 & -0.1195 & -0.4364 & -0.6600 & -0.4355 & 0.0576 \\ -0.4082 & 0.1195 & -0.4364 & 0.6965 & -0.2991 & -0.2322 \\ -0.4082 & 0.3586 & -0.1091 & -0.2235 & 0.6751 & -0.4326 \\ -0.4082 & 0.5976 & 0.5455 & -0.0089 & -0.2718 & 0.3235 \end{vmatrix}$$

$$R = \begin{vmatrix} -2.4495 & -2.6944 & -3.2497 \\ 0 & 0.8367 & 1.8407 \\ 0 & 0 & 0.2444 \end{vmatrix}$$

$$b_1 = \begin{vmatrix} -4.5129 \\ -1.5119 \\ -2.6261 \end{vmatrix}$$

In questo caso basta applicare la sostituzione all’indietro ottenere il risultato voluto.

Risolvere il sistema lineare A x = b, dove

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0.1} & \mathbf{-1.5} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{11} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0.2} & \mathbf{20} \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{vmatrix}$$

Per risolvere il sistema utilizziamo il metodo di Gauss e la decomposizione L U

m. di Gauss

I coefficienti della matrice sono confrontabili, quindi non c’è bisogno del bilanciamento o del pivot.
Applicando l’algoritmo illustrato nel libro ottengo:

k=1

$$A = \begin{matrix} 3.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.500 & -0.6000 & 0 \\ 0 & 3.000 & -33.000 & -1.5000 \\ 0 & 0 & -0.600 & -60.000 \end{matrix} \qquad b = \begin{matrix} -1.0000 \\ -0.1000 \\ -3.0000 \\ 0 \end{matrix}$$

k=2

$$A = \begin{matrix} 3.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.500 & -0.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 146.700 & 6.7500 \\ 0 & 0 & 2.7000 & 270.0000 \end{matrix} \qquad b = \begin{matrix} -1.0000 \\ -0.1000 \\ 13.200 \\ 0 \end{matrix}$$

k=3

$$A = \begin{matrix} 3.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.500 & -0.600 & 0 \\ 0 & 0 & 146.700 & 6.7500 \\ 0 & 0 & 0 & -39590.7750 \end{matrix} \qquad b = \begin{matrix} -1.0000 \\ -0.1000 \\ -3.0000 \\ 35.6400 \end{matrix}$$

Non resta ora che applicare la sostituzione all’indietro, quindi ottengo:

$$x = \begin{matrix} -0.3333 \\ -0.0102 \\ 0.0900 \\ -0.0009 \end{matrix}$$

decomposizione L U

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/30 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3/163 & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 163/15 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 6517/326 \end{vmatrix}$$

(notare che anche le matrici L ed U sono a banda)

Il problema A x = b è quindi diventato (L U) x = b ossia L (U x) = b ; pongo quindi y = U x, risolvo il sistema L y = b, infine il sistema U x = y.

Si ha :

$$y = \begin{matrix} -1 \\ 1/30 \\ 44/45 \\ -44/2445 \end{matrix} \qquad e \qquad x = \begin{matrix} -1/3 \\ -34/3327 \\ 129/1433 \\ -27/29993 \end{matrix}$$

Calcolare l'indice di condizionamento di A, $k(A)=\|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$, dove $\|A\|_\infty$ è la norma massima per righe. Stimare k(A).

Avendo già decomposto A nel prodotto delle matrici L U t.c. A = L U, posso scrivere $A^{-1} = U^{-1} L^{-1}$;

$$U^{-1} \qquad \begin{matrix} 0.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6667 & 0.0123 & -0.0003 \\ 0 & 0 & 0.0920 & -0.0023 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0500 \end{matrix}$$

$$L^{-1} \qquad \begin{matrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0333 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.0222 & -0.6667 & 1.0000 & 0 \\ -0.0004 & 0.0123 & -0.0184 & 1.0000 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = U^{-1} L^{-1} \qquad \begin{matrix} 0.3333 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0225 & -0.6749 & 0.0123 & -0.0003 \\ 0.0020 & -0.0614 & 0.0921 & -0.0023 \\ 0.0000 & 0.0006 & -0.0009 & 0.0500 \end{matrix}$$

$\|A\|_\infty = 20.2$; $\|A^{-1}\|_\infty = 0.7099 \Rightarrow k(A) = 14.3405$.

Dovendo stimare k(A), considero i seguenti vettori:

$$y_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad y_2 = \begin{vmatrix} 2 \\ 0.5 \\ -1 \\ 3 \end{vmatrix} \qquad y_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$z_1 = \begin{vmatrix} 3.0000 \\ -1.2000 \\ 10.0000 \\ 0.2000 \end{vmatrix} \qquad z_2 = \begin{vmatrix} 6.0000 \\ -0.7500 \\ -10.0000 \\ 59.8000 \end{vmatrix} \qquad z_3 = \begin{vmatrix} -3.0000 \\ -6.1000 \\ -4.0000 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$\gamma = \max \{ \| y_i \|_\infty / \| z_i \|_\infty \}$ dove

$\| y_1 \|_\infty / \| z_1 \|_\infty = 0.1000$
$\| y_2 \|_\infty / \| z_2 \|_\infty = 0.0502$
$\| y_3 \|_\infty / \| z_3 \|_\infty = 0.6557$

$\Rightarrow \gamma = 0.6557$

L'indice di condizionamento così stimato è $\| A \|_\infty * \gamma = 13.2459$.

Risolvere con il metodo di Gauss il sistema Ax = b, dove

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -0.9 & -1 & 3\cdot10^3 \\ 0 & 0 & 2 & 1.1 \\ 0.3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.2 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 0.09 \\ 0.5 \\ -1.31 \\ 0.15 \end{vmatrix}$$

Data la particolare disposizione degli elementi di A opero dapprima una permutazione delle righe e poi applico il metodo di Gauss.

Opero i seguenti scambi : riga 3 <---> riga 1 ; riga 1 <---> riga 2 , ottengo

$$A = \begin{vmatrix} 0.3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -0.9 & -1 & 3\cdot10^3 \\ 0 & 0 & 2 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.2 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} -1.31 \\ 0.09 \\ 0.5 \\ 0.15 \end{vmatrix}$$

k=1

$$A = \begin{vmatrix} 0.3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -0.9 & -1 & 3\cdot10^3 \\ 0 & 0 & 2 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.15 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} -1.31 \\ 0.09 \\ 0.5 \\ -0.05 \end{vmatrix}$$

Applicando la sostituzione all'indietro ottengo la soluzione $x = \begin{vmatrix} 3702.72 \\ -1111.70 \\ 0.4333 \\ -0.3333 \end{vmatrix}$

Determinare i fattori triangolari L ed U tali che A=L U e risolvere il sistema A x = b con

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} -0.25 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Determinare A^{-1}.

La matrice A è a banda; posso quindi applicare l'algoritmo di Thomas ottenendo:

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/11 & 1 \end{vmatrix} \qquad U = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 11/7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 40/11 \end{vmatrix}$$

$A\,x = b \;\Rightarrow\; (L\,U)\,x = b \;\Rightarrow L\,(U\,x) = b \;\Rightarrow\; L\,y = b$, dove $y = U\,x$.

Risolvo y con sostituzione in avanti, infine trovo x con sostituzione all'indietro.

$$y = \begin{vmatrix} -1/4 \\ 9/2 \\ 30/7 \\ -41/11 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{vmatrix} \mathbf{-1/20} \\ \mathbf{-1/20} \\ \mathbf{83/40} \\ \mathbf{-41/40} \end{vmatrix}$$

$A^{-1} = U^{-1} * L^{-1} \;\Rightarrow$

$$U^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 4/7 & -8/11 & -1/5 \\ 0 & -1/7 & 2/11 & 1/20 \\ 0 & 0 & 7/11 & 7/40 \\ 0 & 0 & 0 & 11/40 \end{vmatrix} \qquad L^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4/7 & 2/7 & 1 & 0 \\ 4/11 & -2/11 & -7/11 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 1/5 & 2/5 & -3/5 & -1/5 \\ 1/5 & -1/10 & 3/20 & 1/20 \\ -3/10 & 3/20 & 21/40 & 7/40 \\ 1/10 & -1/20 & -7/40 & 11/40 \end{vmatrix}$$

Infine ottengo la stessa soluzione valutando $x = A^{-1}\,b$.

Determinare la regione contenente tutti gli autovalori della matrice A, con

$$A= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Calcolare inoltre il polinomio caratteristico di A, gli autovalori ed i corrispondenti autovettori.

Per il teorema di Gershgorin la regione del piano complesso che contiene tutti gli autovalori della matrice è l'intersezione delle seguenti due regioni:

R={z∈C : | z - 1 |< (1+2+3) } ∪ {z∈C : | z - 2 |< (1+2) } ∪ {z∈C : | z - 1 |< 2 } ∪{z∈C : | z - 1 |< (1+2+6) }

S = {z∈C: | z - 1 |< 1 } ∪ {z∈C: | z - 2 |< (1+2) } ∪ { z ∈ C: | z - 1 | < (2+1+6) } ∪{z∈C: | z - 1 | < (3+2+2) }

In questo caso è semplice trovare la soluzione anche osservando semplicemente le restrizioni imposte a z;
R = {z∈C : | z - 1 |< 9 } = S , quindi la regione cercata è R.

Per trovare il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$ possiamo o determinare il determinante della matrice (A- λ I) o utilizzare l'algoritmo suggerito nel libro, applicato qui di seguito.

Ipotizzando autovalori distinti prendo

$$z_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ 3 \end{vmatrix} \quad z_1 = A\,z_0 = \begin{vmatrix} 2 \\ 16 \\ 4 \\ -18 \end{vmatrix} \quad z_2 = A\,z_1 = \begin{vmatrix} -60 \\ -8 \\ -32 \\ -28 \end{vmatrix} \quad z_3 = A\,z_2 = \begin{vmatrix} -200 \\ -40 \\ -88 \\ -144 \end{vmatrix} \quad z_4 = A\,z_3 = \begin{vmatrix} -768 \\ -280 \\ -376 \\ -392 \end{vmatrix}$$

Il polinomio è quindi $p_A(\lambda) = \lambda^4 + \beta_3 \lambda^3 + \beta_2 \lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_0$, in cui i coefficienti β_i risolvono il sistema:

$$[\ z_0\ z_1\ z_2\ z_3\ ] \begin{vmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{vmatrix} = -z_4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -60 & -200 \\ 4 & 16 & -8 & -40 \\ -2 & 4 & -32 & -88 \\ 3 & -18 & -28 & -144 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -768 \\ -280 \\ -376 \\ -392 \end{vmatrix}$$

Risolvendo il sistema con uno dei metodi noti ottengo: $p_A(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda - 12$.

Per determinare gli autovalori della matrice A dobbiamo trovare le radici del polinomio caratteristico :

ottengo $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = \sqrt{2}$ $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ $\lambda_4 = 3$;

Cerco gli autovettori corrispondenti (essi sono linearmente indipendenti in quanto gli autovalori sono distinti); per determinare l'autovettore corrispondente a $\lambda_1 = 2$ devo trovare il nucleo dell'applicazione lineare $A - \lambda_1 I$, risolvendo il sistema $(A - 2I) * u_1 = 0_{1x\,4}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 6 & -1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

osservo subito che $u_{13} = 2\, u_{14}$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 7 \\ -1 & -2 & 11 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{14} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 \\ -11 \end{vmatrix} u_{14}$$

$$\begin{vmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}^{-1} * \begin{vmatrix} -7 \\ -11 \end{vmatrix} u_{14} = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} u_{14}$$

Sostituendo ottengo il vettore $u_1 = \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$

Gli altri autovettori si possono determinare con lo stesso procedimento, o utilizzando il comando MatLab **eig** ; ottengo

$$u_2 = \begin{Vmatrix} -0.9393 \\ -0.24 \\ -0.24 \\ -0.0497 \end{vmatrix} \quad u_3 = \begin{vmatrix} 0.5043 \\ 0.4644 \\ 0.4644 \\ -0.5606 \end{vmatrix} \quad u_4 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Determinare λ_1 , l'autovalore dominante di A, e v_1, il corrispondente autovettore con

$$A = \begin{vmatrix} 35 & -1 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & -15 & 0 \\ 0 & 20 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 12 & -11 \end{vmatrix}$$

Per trovare l'autovalore dominante, cioè quello di modulo massimo potremmo determinare la radice di modulo massimo del polinomio caratteristico, o più semplicemente iterare un opportuno vettore finché l'autovalore dominante emerge con il numero di cifre decimali esatte.

Considero il vettore iniziale $z_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$, poi costruisco una successione di α_k e σ_k, dove $\alpha_k = \| z_k \|_2$, $y_k = z_k / \alpha_k$, $\sigma_k = y_k^t * A * y_k$.

Si ottiene:

α_0=	2.00000000000000	σ_0=	11.75000000000000
α_1=	22.66605391328628	σ_1=	26.72457420924574
α_2=	35.95523034007411	σ_2=	28.94981856918085
α_3=	31.31833056021054	σ_3=	33.13991400957340
α_4=	33.54017497740664	σ_4=	34.80767840484669
α_5=	34.83957458751060	σ_5=	35.05264549187981
α_6=	35.07125415288578	σ_6=	34.81452927435210
α_7=	34.81800601047874	σ_7=	34.78410413454208
α_8=	34.78438319857272	σ_8=	34.80426058734257
α_9=	34.80432871541628	σ_9=	34.82354707562628
α_{10}=	34.82356966453538	σ_{10}=	34.81936402306776
α_{11}=	34.81936723189250	σ_{11}=	34.81679805676730
α_{12}=	34.81679826435205	σ_{12}=	34.81640107781366
α_{13}=	34.81640119910722	σ_{13}=	34.81711186660022
α_{14}=	34.81711189097537	σ_{14}=	34.81717667806532
α_{15}=	34.81717668023641	σ_{15}=	34.81711402331436
α_{16}=	34.81711402373502	σ_{16}=	34.81706715080408
α_{17}=	34.81706715095927	σ_{17}=	34.81708076737394
α_{18}=	34.81708076739723	σ_{18}=	34.81708733261880
α_{19}=	34.81708733262022	σ_{19}=	34.81708786053850
	34.81708786053930		34.81708594504514

Il corrispondente autovettore $v_1 = \begin{vmatrix} -42.8081 \\ 7.4422 \\ 3.8181 \\ 1.0000 \end{vmatrix}$

Dire se è risolubile con il metodo di Jacobi e di Seidel il sistema A x = b, con

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

In caso affermativo, a partire da x_0 =[0 0 0 0]^t determinare la soluzione con due decimali esatti.

- **Jacobi**

Decomponendo A = L + D +U, la matrice di iterazione è $E_j = (I - D^{-1} A) = -D^{-1} (L+U)$ ha raggio spettrale < 1, infatti

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 1/5 & 0 & 1/5 & 0 \end{vmatrix}$$

ha , per il teorema di Gershgorin, gli autovalori sicuramente compresi nel cerchio di raggio unitario e centro l'origine.

Applicando lo schema iterativo $x_{k+1} = E_j x_k + D^{-1} b$ ottengo la soluzione con l'approssimazione cercata al 4° passo; la successione x_k è :

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0.1667	0.1167	0.0931	0.0951
0	-0.2500	-0.1875	-0.1802	-0.1803
0	0.2500	0.2792	0.2677	0.2789
0	-0.2000	-0.1167	-0.1208	-0.1247

- **Seidel**

Decomponendo A = L + D +U, la matrice di iterazione $E_s = I - (L+D)^{-1} A = - (L+D)^{-1} U$ ha raggio spettrale < 1, con

$$E_s = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/48 & -1/6 \\ 0 & 0 & -11/240 & -1/15 \end{vmatrix}$$

Applicando lo schema iterativo $x_{k+1} = E_j\, x_k + (L+D)^{-1}\, b$ ottengo la soluzione con l'approssimazione cercata al 3° passo; la successione x_k è :

x_0	x_1	x_2	x_3
0	0.1667	0.1104	0.0948
0	-0.2500	-0.1927	-0.1805
0	0.2292	0.2732	0.2790
0	-0.1208	-0.1233	-0.1252

Lo schema di iterazione può essere realizzato anche in una maniera che sembrerebbe implicita, cioè $x_{k+1} = - D^{-1} (L\, x_{k+1} + U\, x_k) + D^{-1}\, b$, ma non lo è se notiamo che nel calcolo della r-esima componente influiscono solo le r-1 componenti, in quanto L è tridiagonale bassa con elementi nulli sulla diagonale. Ottengo:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0.1667	0.1104	0.0962	0.0948
0	-0.2500	-0.1927	-0.1817	-0.1805
0	0.2292	0.2732	0.2782	0.2790
0	-0.1208	-0.1233	-0.1251	-0.1252

Dire se il sistema A x =b è risolubile con lo schema iterativo x_{k+1} =E x_k+ q, dove

$$A = \left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right| \qquad b= \left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right|$$

$$E = \left|\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0.8 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.1429 & 0.1429 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0.3 \end{array}\right| \qquad q = \left|\begin{array}{c} -0.8700 \\ 0.1428 \\ -1.1000 \\ 0.3400 \end{array}\right|$$

In caso affermativo eseguire 4 passi dell'algoritmo a partire da x_0=[0,0,0,0]^t. ·
Dare una stima dell'errore.

Per vedere se il sistema sia risolubile con lo schema iterativo dato occorre innanzitutto verificare che $\rho(E)<1$, poi che risolva quel sistema, e quindi verificare che $q = (I - E)\, A^{-1}\, b$.

Eseguite queste verifiche posso utlizzare lo schema iterativo proposto, ottenendo:

$$x_1 = \left.\begin{array}{l} 0.8700 \\ 0.1428 \\ 1.1000 \\ 0.3400 \end{array}\right| \quad x_2 = \left|\begin{array}{l} 1.6650 \\ 0.3486 \\ 1.2700 \\ -0.2180 \end{array}\right| \quad x_3 = \left|\begin{array}{l} 1.9405 \\ 0.2931 \\ 0.9910 \\ -0.4874 \end{array}\right| \quad x_4 = \left|\begin{array}{l} 1.7846 \\ 0.2148 \\ 0.8563 \\ -0.4008 \end{array}\right.$$

Scrivere la tabella delle differenze divise per il seguente insieme di dati. Servirsene per stimare f(0.64) .

x	**0.5**	**0.7**	**0.9**	**1.1**	**1.3**	**1.5**
y	**3.4000**	**1.4408**	**0.6346**	**0.2264**	**-0.0083**	**-0.15566**

Stimare f '(1.1) con la massima accuratezza possibile.

La tabella delle differenze divise si costruisce in questo modo:

0.5 x_0	3.4000 $f(x_0)$				
		-9.7960 $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$			
0.7 x_1	1.4408 $f(x_1)$		14.4125 (- 4.0310+9.7960) / (0.9-0.5)		
		-4.0310 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$		-15.7292 (4.9750-14.4125) / (1.1-0.5)	
0.9 x_2	0.6346 $f(x_2)$		4.9750 (- 2.0410 + 4.0310) / (1.1-0.7)		13.8151 (-4.6771+15.7292) / (1.3-0.5)
		-2.0410 $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$		-4.6771 (2.1687-4.9750) / (1.3-0.7)	
1.1 x_3	0.2264 $f(x_3)$		2.1687 (-1.1735+2.0410) / (1.3 –0.9)		3.6026 (-1.7950+4.6771) / (1.5-0.7)
		-1.1735 $\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}$		-1.7950 (1.0918-2.1687) / (1.5-0.9)	
1.3 x_4	-0.0083 $f(x_4)$		1.0918 (-0.7368+1.1735) / (1.5-1.1)		
		-0.7368 $\frac{f(x_5)-f(x_4)}{x_5-x_4}$			
1.5 x_5	-0.1557 $f(x_5)$				

La tabella è stata fermata al 4° ordine dato che l'errore di troncamento compiuto dal calcolatore diventa non trascurabile.
Per stimare f '(1.1) con la migliore accuratezza possibile usiamo l'estrapolazione di Richardson: calcolate $F_1(h) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ = -1.6072 e $F_1(2h) = \frac{f(x+2h)-f(x-2h)}{4h}$ = -1.9956 ottengo come stima dell'errore il termine $a_1\, h^2 = -\frac{F_1(2h)-F_1(h)}{3}$ = 0.1295 , quindi posso scrivere

f'(1.1) ≈ $\mathbf{F_1(h) + a_1 h^2}$ = -1.4777 .

Scrivere la tabella delle differenze divise per i seguenti dati

x	**1**	**1.4**	**1.8**	**2.2**	**2.6**
f(x)	**0.8415**	**1.6551**	**0.5274**	**0.4391**	**0.3752**

Determinare tutti i possibili polinomi interpolatori per stimare il valore della funzione in x=1.92

- **Lagrange**

$$P_L(x) = \frac{(x-1.4)(x-1.8)(x-2.2)(x-2.6)}{(1-1.4)(1-1.8)(1-2.2)(1-2.6)} \bullet 0.8415 + \frac{(x-1)\ (x-1.8)(x-2.2)(x-2.6)}{(1.4-1)(1.4-1.8)(1.4-2.2)(1.4-2.6)} \bullet 1.6551 +$$
$$+ \frac{(x-1)(x-1.4)(x-2.2)(x-2.6)}{(1.8-1)(1.8-1.4)(1.8-2.2)(1.8-2.6)} \bullet 0.5274 + \frac{(x-1)(x-1.4)(x-1.8)(x-2.6)}{(2.2-1)(2.2-1.4)(2.2-1.8)(2.2-2.6)} \bullet 0.4391 +$$
$$+ \frac{(x-1)(x-1.4)(x-1.8)(x-2.2)}{(2.6-1)(2.6-1.4)(2.6-1.8)(2.6-2.2)} \bullet 0.3752$$

Ora non resta altro che calcolare $P_L(1.92)$ senza calcolare i coefficienti del polinomio per non peggiorare l'accuratezza; ottengo $P_L(1.92) = 0.3607$.

- **Newton**

Per prima cosa devo scrivere la tabella dalle differenze divise

1 x_0	0.8415 $f(x_0)$				
		2.0340 $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$			
			-6.0666 (- 2.8193-2.0340) / (1.8-1)		
1.4 x_1	1.6551 $f(x_1)$				
		-2.8193 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$			
				7.7622 (3.2481+6.0666) / (2.2-1)	
1.8 x_2	0.5274 $f(x_2)$		3.2481 (- 0.2207+2.8193) / (2.2-1.4)		-6.5034 (-2.6432-7.7622) / (2.6-1)
		-0.2207 $\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$			
				-2.6432 (0.0762-3.2481) / (2.6-1.4)	
2.2 x_3	0.4391 $f(x_3)$		0.0762 (-0.1598+0.2207) / (2.6-1.8)		
		-0.1598 $f(x_4)-f(x_3)$			
2.6 x_4	0.3752 $f(x_4)$				

Posso scrivere quindi il polinomio interpolante $P_N(x)$ = 0.8415 + (x-1)*2.0340+(x-1)*(x-1.4)*(-6.0666)+(x-1)*(x-1.4)*(x-1.8)*7.7622+(x-1)*(x-1.4)*(x-1.8)*(x-2.2)*(-6.5034)

$\Rightarrow P_N(1.92) = 0.3607$.

- **Spline lineare**

$$f(1.92) = \frac{f(2.2) - f(1.8)}{2.2 - 1.8} * (1.92 - 1.8) + f(1.8) = 0.5009$$

- **Spline quadratica**

Per determinare f(1.92) utilizzando la spline quadratica devo determinare i coefficienti c_i nei vari intervalli, ed in particolare a me serve c_2 , quello relativo l'intervallo [1.8 , 2.2] .
Tali coeff. si rcavano risolvendo il sistema (notare che il passo h è costante):

$$\begin{vmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4.8532 \\ 2.5985 \\ 0.0610 \end{vmatrix}$$

(i termini noti sono stati ricavati utilizzando la formula (ricavata da quella del libro) :

$$c_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} - c_{i-1} \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

$c_0 = 0$
$c_1 = -12.1331$
$c_2 = 18.6294$
$c_3 = -18.4769$

Dato che f(1.92) = $S^2(1.92)$ dobbiamo prima scrivere

$$S^2(x) = f_{1.8} + \frac{f_{2.2} - f_{1.8}}{2.2 - 1.8}(x - 1.8) + c_2(x - 1.8)(x - 2.2)$$

ottenendo f(1.92) = - 0.1250

- **Spline cubica**

Come confronto utilizzo il MatLab per determinare f(1.92) attraverso la spline cubica, ottenendo f(1.92) = 0.3785.

Data la funzione

x	1	1.4	1.8	2.2	2.6
f(x)	**0.8415**	**1.6551**	**0.5274**	**0.4391**	**0.3752**

calcolare $I = \int_1^{2.6} f(x)dx$ **con il metodo di Cavalieri-Simpson.**

Dare una stima dell'errore.

$I_1 = {}^{(2.6-1)} / {}_{(3*4)} [\; f_1 + 4\, f_{1.4} + 2\, f_{1.8} + 4\, f_{2.2} + f_{2.6}\;] = 1.4198$.

Per dare una stima dell'errore posso calcolare l'integrale I_1 in un n° metà di intervalli, cioè determinando $I_2 = {}^{(2.6-1)} / {}_{(3*2)} [\; f_1 + 4\, f_{1.8} + f_{2.2}\;] = 0.8870$.

Ottengo così una migliore stima dell'integrale ponendo $I = I_1 + \dfrac{I_2 - I_1}{15} \cong 1.3843$.

Applicando il metodo di Romberg stimare il valore del seguente integrale $I = \int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx$ **con 4decimali esatti.**

Il metodo di Romberg fa un uso sistematico dell'estrapolazione di Richardson a partire dei valori ottenuti applicando il metodo dei trapezi (colonna A) , quindi seguendo l'algoritmo descritto nel libro si ha:

A(m)	Δ_1 / 3	B(m)	Δ_2 /15	C(m)	Δ3/63	D(m)
0.1839						
0.2867	0.0342	0.3209				
0.3089	0.0074	0.3163	-0.0003	0.3160		
0.3143	0.0018	0.3161	0.0000	0.3161	0.12e-5	0.3161

Quindi $I = \int_0^1 x\, e^{-x^2}\, dx \cong 0.3161$

Risolvere il seguente problema di Cauchy con h=0.1, h=0.2 ed h=0.4 con il metodo di Eulero esplicito, Eulero implicito, Crank-Nicolson .

$$\begin{cases} y' = x^2/y \\ y(0.3) = 1 \end{cases}$$

Confrontare i risultati.

Calcolare $\int_{-1}^{1} \log(1+x^2)\,dx$ con 4 decimali esatti.

Utilizzando il metodo di Cavalieri-Simpson potrei stimare a priori il numero di intervalli richiesti per soddisfare la specifica, ma questo metodo presuppone la conoscenza della derivata quarta ($R_T = -\left(\frac{b-a}{180}\right) h^4 f^{(iv)}(h)$) ; quindi ricavo passo passo l'errore ottenuto, e mi fermo una volta raggiunta l'approssimazione richiesta.

Per migliorare il risultato uso l'estrapolazione di Richardson, che mi consente di effettuare dei calcoli relativi l'integrale in numero minore e nello stesso la stima così ottenuta può essere corretta con il termine $\tilde{e} = \frac{I_1(2n) - I_1(n)}{15}$.

Per 1 intervallo compreso nell'intervallo [-1 , 1] ho n = 2, quindi

$$I_1 = \frac{(b-a)}{3n}\left[f_0 + 4f_1 + f_2\right] = \frac{2}{6}(2\log 2) \cong 0.200687$$

considero n=4, ho $I_2 = \frac{(b-a)}{3n}\left[f_0 + 4f_{0.5} + 2f_0 + 4f_{0.5} + f_1\right] = \frac{2}{12}(2\log 2 + 8\log(1.25)) \cong 0.229556$

La stima dell'errore è quindi (I_2 - I_1) / 15 ≅ 0.002 , quindi ho stimato l'integrale a meno di tre cifre decimali.

$$I_3 = \frac{(b-a)}{3n}\left[f_{-1} + 4f_{-0.75} + 2f_{-0.5} + 4f_{-0.25} + 2f_0 + 4f_{0.25} + 2f_{0.5} + 4f_{0.75} + f_1\right] =$$

$$= \frac{2}{24}\left[2\log 2 + 8\log(1.5625) + 4\log(1.25) + 8\log(1.0625)\right] \cong 0.229241$$

Stavolta la stima dell'errore è $\tilde{e} = \frac{I_3 - I_2}{15} \cong -2..1\ 10^{-5}$

$\Rightarrow \qquad I \cong I_3 + \tilde{e} = 0.2292$ **.**

Dato il problema ai valori iniziali $\begin{cases} y' = 2(x + x\,y^2) \\ y(0) = 1.5 \end{cases}$

stimare y(0.2) eseguendo due passi con il metodo di Runge-Kutta del 4º ordine ed h=0.1. Dare una stima dell'errore.

h = 0.1

Applicando l'algoritmo proposto posso scrivere

$k_1 = h\, f(x_0 , y_0) = 0$
$k_2 = h\, f(x_0 + h/2 , y_0 + k_1 /2) = 0.03250$
$k_3 = h\, f(x_0 + h/2 , y_0+k_2 /2) = 0.032990$
$k_4 = h\, f(x_0 + h , y0+k_3) = 0.067001$

$y(0.1) \cong y_1 = y_0 + 1/6 (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) = 1.53299690944584$

$k_1 = h\, f(x_1 , y_1) = 0.067002$
$k_2 = h\, f(x_1 + h/2 , y_1 + k_1 /2) = 0.1036174$
$k_3 = h\, f(x_1 + h/2 , y_1 +k_2 /2) = 0.1053482$
$k_4 = h\, f(x_1 + h , y_1 +k_3) = 0.1473669$

$y(0.2) \cong y_1 + 1/6 (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) =1.63838024691510$

h = 0.2

$k_1 = h\, f(x_0 , y_0) = 0$
$k_2 = h\, f(x_0 + h/2 , y_0 + k_1 /2) = 0.13000$
$k_3 = h\, f(x_0 + h/2 , y_0+k_2 /2) = 0.13796900000000$
$k_4 = h\, f(x_0 + h , y0+k_3) = 0.29463539559688$

$y(0.2) \cong y_1 = y_0 + 1/6 (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) = 1.63842889926615$

una stima dell'errore è $R_T \cong (y(0.2)_{h=0.1} - y(0.2)_{h=0.2}) / 15 = 3.24\ 10^{-6}$, quindi

y(0.2) = 1.63838

Data il problema di Cauchy $\begin{cases} y'''-y''+y=0 \\ y(0)=1 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=2 \end{cases}$

stimare la soluzione per x=0.4 con il metodo di Crank-Nicolson ed h=0.2 .

Allo scopo di usare il metodo di Cranck-Nicolson trasformo il problema dato come una equazione diff. di ordine tre in un sistema di equaz. diff. di ordine uno, ponendo

$z_1 = y(x)$,
$z_2 = y'(x)$,
$z_3 = y''(x)$.

$$\begin{cases} d \quad = z_2 \\ d \;_2 = z \\ d \;_3 \quad z_3 - z \\ \;_1(0) = 1 \\ z_2(0) \quad 0 \\ z\,(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ z_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Il metodo di Cranck- Nicolson consiste quindi nell'applicare il seguente schema

$$z_{n+1} = z_n + h/2 * [\, A*z_{n+1} + A*z_n \,] \text{, dove } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dato che si tratta di un sistema lineare posso esplicitare rispetto z_{n+1} , ottenendo $z_{n+1} = E\, z_n$, dove

$$E = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right) = \begin{bmatrix} 0.9978 & 0.1998 & 0.0222 \\ -0.0222 & 0.9978 & 0.2220 \\ -0.2220 & -0.0222 & 1.2198 \end{bmatrix}$$

La soluzione sarà quindi la prima componente del vettore z, ottenuta dopo aver iterato 2 volte lo schema proposto; si ha

y(0) = 1
y(0.2) = 1.0422
y(0.4) = 1.1733

Determinare l'ordine del metodo lineare a 2 passi

$y_{n+2} - y_n = h/3\ (f_{n+2} + 4\ f_{n+1} + f_n)$ e dire se è convergente.

Usarlo, con h=0.1, per stimare la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2\,x\,y \\ y(1) = 0.3 \end{cases}$ **in**

x=1.2.
Confrontare il risultato con quello fornito dal metodo di Runge-Kutta di ordine quattro.

Lo schema proposto è uno schema del tipo seguente : $\sum_{i=0}^{k} a_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} b_i\ f_{n+i}$, dove nel nostro caso k = 2, α_0 = -1 , α_1 = 0 , α_2 = 1 , β_0 = 1/3 , β_1 = 4/3 β_2 = 1/3 .

L'ordine di questo schema è q se $c_0=c_1=...= c_q = 0$ e $c_{q+1} = 0$, dove $c_q = \sum_{i=0}^{k} (i)^q a_i - q \sum_{i=0}^{k} (i)^{q-1} b_i$.

c_0 = 1 + 0 - 1 = 0
c_1 = [0 * (-1) + 1 * 0 + 2 * 1] - 1/3 * [1 + 4 +1] = 2 - 2 = 0
c_2 = [0 * (-1) + 1 * 0 + 4 * 1] - 2 / 3 * [0 *1 + 1 * 4 + 2 * 1] = 4 - 4 = 0
c_3 = [0 * (-1) + 1 * 0 + 8 * 1] - [0 *1 + 1 * 4 + 4 * 1] = 8 - 8 = 0
c_4 = [0 * (-1) + 1 * 0 + 16 * 1] - 4 / 3 * [0 *1 + 1 * 4 + 8 * 1] = 16 - 16 = 0
c_4 = [0 * (-1) + 1 * 0 + 32 * 1] - 5 / 3 * [0 *1 + 1 * 4 + 16 * 1] = 32 - 100/3 $\neq$ 0

$\Rightarrow$ il metodo è di ordine quattro.

Per studiare la convergenza devo verificare che il metodo sia consistente (lo è dato che $c_0 = c_1 = 0$) e che sia zero-stabile, cioè che le radici del primo polinomio caratteristico $p(\zeta) = \zeta^2-1$ risiedano all'interno della circonferenza di raggio unitario (o che quelle di modulo 1 siano radici semplici).
In questo caso trovo semplicemente $\zeta_1 = 1$ e $\zeta_2 = -1$, quindi posso concludere:

il metodo è consistente e zero-stabile $\Rightarrow$ il metodo (di Simpson) è convergente .

Trovo l'ulteriore condizione iniziale con il metodo di Heun :
$k_1 = h\ f(x_0, y_0) = 0.06$
$k_2 = h\ f(x_0+h\ , y_0 + k_1) = 0.0198$

$y(1.1) = y(1) + 0.5 * (k_1 + k_2) = 0.3696$

Applicando il metodo posso scrivere

y(1.2) - 0.3 = 0.1/3 * (2*1.2*y(1.2) + 4 * 2 * 1.1 * 0.3696 + 2 * 1 * 0.3)
y(1.2) = 0.3 + 0.08 y(1.2) +0.128416

$\Rightarrow$ y(1.2) = 0.46566956521739

Aplicando il metodo di Runge-Kutta otterrei :

h = 0.1

$k_1 = h\ f(x_0 , y_0).06000$
$k_2 = h\ f(x_0 + h/2 , y_0 + k_1 /2) = 0.06930$
$k_3 = h\ f(x_0 + h/2 , y_0+k_2 /2) = 0.0702765$
$k_4 = h\ f(x_0 + h , y0+k_3) = 0.08146083$

$y(1.1) \cong y_1 = y_0 + 1/6 (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) = 0.37010230500000$

$k_1 = h\ f(x_1 , y_1) = 0.08142$
$k_2 = h\ f(x_1 + h/2 , y_1 + k_1 /2) = 0.094487$
$k_3 = h\ f(x_1 + h/2 , y_1 +k_2 /2) = 0.095989$
$k_4 = h\ f(x_1 + h , y_1 +k_3) = 0.11186$

$y(1.2) \cong y_1 + 1/6 (k_1 + 2 k_2 + 2 k_3 + k_4) = 0.46580861941433$

La differenza tra i due metodi è quindi di circa $-1.39\ 10^{-4}$.

Data la funzione f(x) definita dalla seguente tabella,

x	1.00	1.20	1.400	1.60	1.80	2.00	2.20	2.40	2.60
f(x)	2.3679	2.4835	2.5831	2.6719	2.7531	2.828	2.8993	2.9662	3.0298

calcolare $\int_1^2 f(x)\,dx$ **con la massima accuratezza possibile.**

Dare una stima dell'errore.

Determinare l'ordine del metodo lineare a 3 passi

$y_{n+3} - y_n = (h/_{12})\ (27\ y'_{n+2} + 49\ y'_n)$

e dire se è convergente. In caso affermativo, applicarlo, con h=0.1, per stimare la soluzione del problema di Cauchy

$\begin{cases} y' = 2(x + xy^2) \\ y(0) = 1.5 \end{cases}$ **in x=0.2.**

Trovare le ulteriori condizioni iniziali con il metodo di Heun.

Lo schema proposto è uno schema del tipo seguente : $\sum_{i=0}^{k} a_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} b_i\ f_{n+i}$, dove nel nostro caso k = 3, α_0 = -1 , α_1 = 0 , α_2 = 0, α_3 = 1 , β_0 = 49/12 , β_1 = 0, β_2 = 27/12, β_3 = 0 .

L'ordine di questo schema è q se c_0=c_1=...= c_q = 0 e c_{q+1} = 0, dove $c_q = \sum_{i=0}^{k} (i)^q a_i - q \sum_{i=0}^{k} (i)^{q-1} b_i$.

c_0 = 1 + 0 + 0 - 1 = 0

c_1 = [0 * (-1) + 1 * 0 + 2 * 0 + 3*1] - 1/12 * [49 + 0 + 27 + 0] = 3 - 6.3 $\neq$ 0

???

$\Rightarrow$ il metodo è di ordine zero.

Per studiare la convergenza devo verificare che il metodo sia consistente (lo è dato che c_0 = c_1 = 0) e che sia zero-stabile, cioè che le radici del primo polinomio caratteristico p(ζ) = ζ^2-1 risiedano all'interno della circonferenza di raggio unitario (o che quelle di modulo 1 siano radici semplici).
In questo caso trovo semplicemente ζ_1 = 1 e ζ_2 = -1 , quindi posso concludere:

il metodo è consistente e zero-stabile $\Rightarrow$ il metodo (di Simpson) è convergente .

Applicando il metodo posso scrivere y(1.2) - y(1) = 0.1/3 * (2*1.2*y(1.2)

Data l'equazione differenziale $y^{(3)}+4\,y^{(2)} + y - 2 = 0$
con condizioni iniziali y(0) = -1, y'(0) =1, y"(0) = 0 stimare la soluzione per x=0.4 con il metodo di Crank-Nicolson ed h=0.1.

Allo scopo di usare il metodo di Cranck-Nicolson trasformo il problema dato come una equazione diff. di ordine tre in un sistema di equaz. diff. di ordine uno, ponendo

$z_1 = y(x)$, $z_2 = y'(x)$, $z_3 = y''(x)$.

$$\begin{cases} d_x z_1 = z_2 \\ d_x z_2 = z_3 \\ d_x z_3 = -4\,z_3 - z_1 + 2 \\ z_1(0) = -1 \\ z_2(0) = 1 \\ z_3(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ z_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Il metodo di Cranck- Nicolson consiste quindi nell'applicare il seguente schema

$z_{n+1} = z_n + h/2 * [\, A*z_{n+1} + A*z_n + 2\,b]$, dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Dato che si tratta di un sistema lineare esplicito z_{n+1} , ottenendo $z_{n+1} = E\,z_n + q$, dove

$$E = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{h}{2}A\right) = \begin{bmatrix} 0.9998 & 0.1000 & 0.0042 \\ -0.0042 & 0.9998 & 0.0833 \\ -0.0833 & -0.0042 & 0.6665 \end{bmatrix}$$

$$q = \left(I - \frac{h}{2}A\right)^{-1} b = \begin{bmatrix} 0.0042 \\ 0.0833 \\ 1.6665 \end{bmatrix}$$

La soluzione sarà quindi la prima componente del vettore z, ottenuta dopo aver iterato 4 volte lo schema proposto; si ha

y(0) = -1
y(0.1) = -0.8956
y(0.2) = -0.7753
y(0.3) = -0.6269
y(0.4) = - 0.4427